Janis Mühlratzer 2004

1 Bernoulli-Gleichung

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho_0}+gz_1=\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho_0}+gz_2 \tag{3.68}$$

$$\frac{v_1^2}{2}+gz_1=\int_1^2\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{s}+\int_1^2\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gz_2 \tag{3.72}$$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\neq\vec{0}$: (1) und (2) auf einer Stromlinie und $\vec{v}\cdot\vec{s}=v\,s$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v}=\vec{0}$: (1) und (2) beliebig

$$\alpha\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho_0}+gz_1=\alpha\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho_0}+gz_2+gH_{E_{12}} \tag{aus 3.68}$$

$$H_{E_{12}}=\left(\sum_i\zeta_i+\lambda\frac{L}{D}\right)\frac{\overline{v}^2}{2g}-\frac{\eta_P P_P}{Q\rho g}+\frac{P_T}{\eta_T Q\rho g}\qquad\overline{v}=\frac{Q}{A}\qquad\begin{array}{r}\text{laminar: }\alpha=2\\\text{turbulent: }\alpha=1\end{array}\quad Re_k=2300$$

2 Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V\rho\,\mathrm{d}V+\iint\limits_S\rho\,(\vec{v}\cdot\vec{n})\;\mathrm{d}S=0 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\,\vec{v})=0 \tag{2.10}$$

3 Impulssatz

$$\iiint\limits_V\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\vec{v})\;\mathrm{d}V+\iint\limits_S\vec{v}\,\rho\,(\vec{v}\cdot\vec{n})\;\mathrm{d}S=\vec{F} \tag{3.47}$$

$$\vec{F}=\vec{F}_p+\vec{F}_f+\vec{F}_K+\vec{F}_R \tag{3.52}$$

$$\vec{F}_p=-\iint\limits_S p\,\vec{n}\;\mathrm{d}S=-\iint\limits_S(p-p_\infty)\,\vec{n}\;\mathrm{d}S \tag{3.49a}$$

$$\vec{F}_f=\iiint\limits_V\rho\vec{f}\;\mathrm{d}V\qquad\vec{f}=\vec{\mathrm{grad}}\,U \tag{3.50a}$$

4 Thermodynamik

$$c_p-c_v=R\qquad\kappa=\frac{c_p}{c_v}$$

$$c_p=\frac{\kappa}{\kappa-1}R\qquad c_v=\frac{1}{\kappa-1}R$$

5 Isentropenbeziehungen

$$T_{01} = T_{02} \qquad p_{01} = p_{02}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{T_2}{T_0}}{\frac{T_1}{T_0}} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_2^2} \qquad \text{Beachte } 1 - 2!$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_2^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{8.28b}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_2^2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \tag{8.28a}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_2^2}} \tag{8.31}$$

6 Gasdynamik

$$T_0 = T + \frac{v^2}{2c_p} = T\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right) \quad \text{isentrop} \tag{8.74}$$

$$Ma = \frac{v}{c} \not\sim v \qquad c = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{\kappa R \left(T_0 - \frac{v^2}{2c_p}\right)} = f(v) \tag{9.21c}$$

$$La = \frac{v}{c^*} \sim v \qquad c^* = \sqrt{\frac{2\kappa R T_0}{\kappa+1}} = const. \tag{9.22a}$$

$$c(Ma{=}1) \equiv c^* \qquad La(v{=}c) \equiv Ma(v{=}c) \equiv 1$$

$$La = \sqrt{\frac{(\kappa+1)Ma^2}{2 + (\kappa-1)Ma^2}} \qquad Ma = \sqrt{\frac{2\,La}{\kappa + 1 - (\kappa-1)La^2}} \quad \text{[B.1]} \tag{9.23a}$$

$$\dot{m} = \frac{Ma}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}} \sqrt{\frac{\kappa}{R T_0}}\, p_0 A \tag{9.24}$$

7 Ruhezustand

$$v_0 = 0$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{-1} \qquad \text{[B.1]} \tag{9.19}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad \text{[B.1]} \tag{9.20a}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \qquad \text{[B.1]} \tag{9.20b}$$

$$\frac{c}{c_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} = \sqrt{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2} \qquad \text{[B.1]} \tag{9.21c}$$

8 Kritische Werte (Zahlenwerte für $\kappa := 1{,}4$)

$$Ma^* \equiv 1$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\kappa+1} = 0{,}833$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0{,}528$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = 0{,}634$$

$$\frac{c^*}{c_0} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} = 0{,}913 \qquad \text{(mit 9.22a)}$$

$$\frac{A^*}{A_e} = Ma_e\left[\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)\left(1+\frac{\kappa-1}{2}Ma_e^2\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{2(1-\kappa)}} \qquad (9.26)$$

9 Senkrechter Verdichtungsstoß

$$La_2 = \frac{1}{La_1} \qquad (9.61b)$$

$$Ma_2 = \sqrt{\frac{1+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\left(Ma_1^2-1\right)}{1+\frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(Ma_1^2-1\right)}} \quad \text{symmetrisch in } Ma_{1,2} \qquad [B.2] \qquad (9.35)$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 \qquad \text{adiabat, aber...} \qquad (9.30)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{1+\frac{\kappa-1}{2}Ma_2^2}{1+\frac{\kappa-1}{2}Ma_1^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = D \qquad \text{...nicht isentrop} \qquad [B.2] \qquad (9.39b)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1+\frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(Ma_1^2-1\right)\right]\left[1-\frac{2}{\kappa+1}\left(1-\frac{1}{Ma_1^2}\right)\right] \qquad [B.2] \qquad (9.38a)$$

$$= \frac{1+\frac{\kappa-1}{2}Ma_1^2}{1+\frac{\kappa-1}{2}Ma_2^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1+\frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(Ma_1^2-1\right) \qquad [B.2] \qquad (9.38c)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{1-\frac{2}{\kappa+1}\left(1-\frac{1}{Ma_1^2}\right)} \qquad [B.2] \qquad (9.38b)$$

$$s_2 - s_1 = R\ \ln\frac{p_{01}}{p_{02}} \qquad (9.40b)$$

10 Herzkurvendiagramm

- Ermittlung der Abströung einer Profilhinterkante: Einen Ausgangszustand in den Ursprung setzen, den anderen relativ dazu mittels Verhältnis der Drücke und der relativen Strömungswinkel lokalisieren.
- Interferenz zweier Stöße / Fächer: Den Ausgangszustand (vor allen Stößen / Expansionen) in den Ursprung legen, von dort die zwei Zustandsänderungen auftragen und über Zustandsäderungen vorerst noch unbekannter Länge in die jeweilige Gegenrichtung wieder zusammenführen. Der Schnittpunkt gibt die neuen Zustände mit *gleichem* Druck und (schwach) *unterschiedlichen* Lavalzahlen an.

11 Schräger Verdichtungsstoß

$$v_t = v_1 = v_2 = V_1 \cos\sigma \neq 0 \qquad v_{n1} = u_1 \qquad v_{n2} = u_2$$

$$u_1 = V_1 \sin\sigma = v_t \tan\sigma \qquad u_2 = V_2 \sin(\sigma - \vartheta) = v_t \tan(\sigma - \vartheta) \tag{9.42}$$

$$\tan\vartheta = \frac{1}{\tan\sigma} \; \frac{Ma_1^2 \sin^2\sigma - 1}{1 + \left(\frac{\kappa+1}{2} - \sin^2\sigma\right) Ma_1^2} \qquad \text{[S.1], [S.2]} \tag{9.49}$$

$$La_{2n} = \frac{1}{La_{1n}} \qquad \text{(nach 9.61b)}$$

$$Ma_{1n} = \frac{u_1}{c_1} = Ma_1 \sin\sigma \tag{9.43}$$

$$Ma_{2n} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\left(Ma_{1n}^2 - 1\right)}{1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(Ma_{1n}^2 - 1\right)}} \qquad \text{[B.2]} \tag{9.35}$$

$$Ma_2 = \frac{Ma_{2n}}{\sin(\sigma - \vartheta)} \qquad \text{[S.4]} \tag{9.46}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 \qquad \text{adiabat, aber...} \tag{9.30}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_{2n}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_{1n}^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = D \qquad \text{...nicht isentrop} \qquad \text{[S.3], [B.2]} \qquad \text{(S. 344)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_{1n}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_{2n}^2} \qquad \text{[B.2]} \qquad \text{(S. 344)}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(Ma_{1n}^2 - 1\right) \qquad \text{[S.5]} \qquad \text{(S. 344)}$$

12 Prandtl-Meyer-Expansionsfächer

$$s = const.$$

$$\mu_1 = \arcsin\frac{1}{Ma_1} \qquad \textit{Vorderkantenwinkel} \qquad \text{[B.1]} \tag{9.67}$$

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \arctan\sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\left(Ma_1^2 - 1\right)} - \arctan\sqrt{Ma_1^2 - 1} \qquad \text{Pr.-M.-}\textit{Winkel} \qquad \text{[B.1]} \tag{9.74}$$

$$\nu_2 = \nu_1 + \vartheta \qquad \Rightarrow Ma_2 \qquad \Rightarrow \mu_2 \qquad \textit{Hinterkantenwinkel} \qquad \text{[B.1]} \tag{9.76}$$

$$\phi = \vartheta + \mu_1 - \mu_2 \qquad \textit{Expansionsfächeröffnungswinkel} \tag{9.4-6}$$

$$\sigma = \frac{\mu_1 + \mu_2 - \vartheta}{2} \qquad \textit{Mittlerer Fächerwinkel}$$

$$\frac{T_2}{T_1}, \frac{p_2}{p_1} \qquad \text{über Isentropenbeziehungen} \tag{9.77a,b}$$

13 Potentialtheorie

$$\vec{v} = \vec{\text{grad}}\Phi$$

Voraussetzungen:

- Reibungsfreiheit, weil an der Wand $v_t \neq 0$
- $\vec{\text{rot}}\vec{v} = \vec{0}$, weil $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}\Phi) \equiv \vec{0}$
- Für dichtebeständiges Fluid ($\rho = const.$): $\text{div}(\rho\,\vec{v}) = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = 0$
- Einfach zusammenhängendes Gebiet oder für Aussparungen Zirkulation angegeben

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \qquad \text{Cauchy-Riemann-}DGL \tag{7.54}$$

$$v^{*}(z) = \frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z} = u(x,y) - \mathrm{i}\,v(x,y) \qquad |\vec{v}(x,y)| = v^{*}(z)\;v(z) = \sqrt{\text{Re}(v^{*})^2 + \text{Im}(v^{*})^2}$$

Konturbedingung: Die Summe aller Quellen im geschlossen Körper ist gleich 0.

$$\dot{m}_{\perp 1-2} = \rho\,(\Psi_2 - \Psi_1) \qquad \mathrm{d}\dot{m}_{\perp} = \rho\,\mathrm{d}\Psi \tag{S. 26}$$

$$\Gamma \equiv \oint_s \vec{v}\;\mathrm{d}\vec{s} = \int_A \vec{\text{rot}}\vec{v}\cdot\vec{n}\;\mathrm{d}A = \int_A \vec{\Omega}\cdot\vec{n}\;\mathrm{d}A \tag{7.20}$$

$$\Gamma_{1-2} = \int_1^2 \vec{v}\;\mathrm{d}\vec{s} = \Phi_2 - \Phi_1 \tag{7.39}$$

Ein Feld konstanter Zirkulation ($\Gamma = const.$) ist (außer in den Singularitäten) wirbelfrei ($\vec{\text{rot}}\vec{v} = \vec{0}$).
$\Rightarrow$ Ein Potentialfeld hat konstante Zirkulation.
Ein Feld konstanter Drehung ($\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = \vec{\text{rot}}\vec{v} = const.$) hat veränderliche Zirkulation und ist folglich kein Potentialfeld.

$$F_A = +\,b\,\rho\,u_\infty\,\Gamma \qquad \text{Kutta-Joukowski} \tag{7.98}$$

$$c_p(x,y) = \frac{p(x,y) - p_\infty}{q_\infty} \quad \underbrace{= 1 - \left(\frac{u(x,y)}{u_\infty}\right)^2}_{\text{nur inkompressibel}}$$

14 Mathematik

$$\Delta\Phi = \mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}}\Phi) = \vec{\nabla}^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\mathrm{div}\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\vec{\mathrm{grad}}\Phi = \vec{\nabla}\,\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}\Phi) \equiv \vec{0} \qquad \text{Das Gradientenfeld ist wirbelfrei.}$$

$$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}) \equiv 0 \qquad \text{Das Rotationsfeld ist quellfrei.}$$

Integration über ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(x,y) = \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ entlang einer gegebenen Kurve $\vec{w}(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$:

1. Kurve nach $\vec{w}(x) = \binom{x}{y(x)}$ umparametrisieren.
2. Einsetzen der Wegbedingung $y = y(x)$ in $\vec{v}(x,y) = \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ liefert $\vec{v}_w(x) = \binom{u(x)}{v(x)}$.
3. Damit die Integration über $\vec{v}_w(x)$ entlang x ausführen.